

Numerische Modellierung der gedämpften Pendelschwingung und des Falls aus großer Höhe

CHRISTIAN SPREITZER, BADEN

Die numerische Analyse von Differentialgleichungen ist ein charakteristisches und essentielles Element von Modellierungsproblemen der angewandten Mathematik, das im Schulunterricht jedoch meist nur ein Dasein als Randthema fristet. Dabei lassen sich numerische Algorithmen zum Lösen von Differentialgleichungen ohne großen Aufwand in allen gängigen Tabellenkalkulationsprogrammen implementieren. Realitätsnahe Modelle führen zudem sehr häufig auf Differentialgleichungen, die sich ohnehin nur mit numerischen Methoden erschließen lassen. In diesem Beitrag werden zwei Beispiele aus der Physik vorgestellt, die dem Anspruch realistischer Modellierung gerecht werden und zugleich einer Behandlung im Schulunterricht zugänglich sind. Die numerisch berechneten Lösungen werden mit realen Daten verglichen, zu deren Gewinnung auch ein Smartphone eingesetzt wird, das sich durch die eingebauten Sensoren hervorragend als Messinstrument verwenden lässt.

1. Einleitung

In der angewandten Mathematik sind Differentialgleichungen (DGLen) von immenser Bedeutung. Die grundlegenden physikalischen Theorien, auf denen ein großer Teil des technischen Fortschritts im 19. und 20. Jahrhundert beruht, sind als (Systeme von partiellen) DGLen formuliert, darunter die Maxwellgleichungen für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen, die Schrödingergleichung in der Quantenmechanik oder die Einsteingleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie. Physikalische Fragestellungen im Rahmen dieser und vieler weiterer fundamentaler Theorien lassen sich häufig in mathematische Fragestellungen zu den der Theorie zugrundeliegenden DGLen übersetzen. Allein daran lässt sich erahnen, wie wichtig DGLen und ihre Lösungsmethoden für die Physik sind. Berühmte und gesellschaftsrelevante Beispiele von DGLen finden sich jedoch nicht nur in der Physik, sondern in allen Natur- und Ingenieurwissenschaften, aber auch in der Medizin, der Soziologie oder den Wirtschaftswissenschaften.

Im Schulunterricht sind DGLen allerdings kaum oder gar nicht vertreten. Dies liegt wohl zum einen an der geringen Vielfalt exemplarischer DGLen, die exakt lösbar und einfach genug für eine Untersuchung im Rahmen der Schulmathematik sind. Zum anderen stoßen wir bei der Behandlung authentischer Fragestellungen und realitätsnaher Modelle sehr schnell auf DGLen, die sich analytischen Lösungsmethoden ganz entziehen. Mit numerischen Verfahren lässt sich für ein gegebenes System aus DGLen und Anfangs- bzw. Randbedingungen hingegen immer eine (zumindest approximative) Lösung finden, sofern es sich um ein gut gestelltes Problem nach der Definition J. Hadamards handelt. Ein solches liegt vor, wenn die Existenz einer eindeutigen Lösung gesichert ist und diese stetig von den Daten abhängt (mit anderen Worten, die Voraussetzungen eines geeigneten Existenz- und Eindeutigkeitssatzes müssen erfüllt sein). Die Numerik spielt daher insbesondere in der angewandten Mathematik seit ihren Anfängen eine große Rolle und ihre Bedeutung hat durch die digitale Revolution der letzten Jahrzehnte noch deutlich zugenommen. Im Zeitalter der Supercomputer werden physikalische Experimente durch Computersimulationen ergänzt, vielfach machen sie komplexe physikalische Vorgänge einer Modellierung überhaupt erst zugänglich. Beispiele dafür sind die Entstehung der Galaxien im frühen Universum, der Kollaps eines massereichen Sterns zu einem schwarzen Loch oder irdische Problemstellungen wie die Verteilung des Mülls in den Ozeanen, die Ausbreitung von Vulkanasche in der Erdatmosphäre oder die Veränderung des Klimas durch den Einfluss des Menschen und damit verbundene Prozesse in der Natur. DGLen sind ein zentrales Element in der Beschreibung, Modellierung und Simulation all dieser Vorgänge mithilfe von Hochleistungsrechnern.

Die Wichtigkeit von DGLen und numerischen Methoden in vielen Bereichen kommerzieller und wissenschaftlicher Forschung spiegelt sich im Schulunterricht nicht wider. Dass das numerische Lösen von DGLen im Schulunterricht meist wenig Aufmerksamkeit erfährt, könnte zu einem gewissen Teil auch ein

Erbe der Vor-Computer-Ära sein, als solche Berechnungen noch händisch ausgeführt werden mussten. Indes wäre das numerische Lösen von DGLen durch die überall verfügbare Technologieunterstützung heutzutage weder schwierig noch aufwendig. Vor allem würde die Behandlung von DGLen und numerischen Lösungsverfahren die Beschäftigung mit realitätsnahen Problemen der angewandten Mathematik ermöglichen, in denen auch kompliziertere Wechselwirkungen, zusätzliche Einflussgrößen oder dissipative Vorgänge wie Reibung berücksichtigt werden. In der das Problem beschreibenden DGL äußert sich das Miteinbeziehen solcher Effekte in Form zusätzlicher Terme oder Abhängigkeiten. Dies führt zwar in der Regel dazu, dass die Lösung nicht mehr durch elementare Funktionen ausgedrückt oder überhaupt nicht mehr exakt berechnet werden kann, bei einer rein numerischen Untersuchung der DGL ist es im Prinzip aber völlig unerheblich, ob weitere Terme hinzukommen oder kompliziertere Funktionen in den Koeffizienten der DGL auftreten (jedenfalls bei ausreichend großer Rechenkapazität des verwendeten Computers). Das Verfahren bleibt dasselbe und der Aufwand wächst nur unmerklich; es muss lediglich der Computer mit einer etwas modifizierten Gleichung gefüttert werden. Durch die Verwendung technischer Hilfsmittel bleibt also viel Raum für die Modellierung und die Diskussion der Ergebnisse.

2. Ein kurzer Abriss numerischer Verfahren für gewöhnliche DGLen

Wir wollen kurz illustrieren, wie mithilfe numerischer Verfahren approximative Lösungen gewöhnlicher DGL gewonnen werden können. Dazu betrachten wir das allgemeine Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

mit $F : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und global Lipschitz-stetig bezüglich des zweiten Arguments, d.h.

$$\exists L > 0 : \forall (t, x), (t, y) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^n : \|F(t, x) - F(t, y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Unter diesen Voraussetzungen besitzt das Anfangswertproblem (1) eine eindeutige Lösung $t \mapsto x(t)$ auf dem Intervall $[t_0, T]$ (dies ist Aussage des Satzes von Picard-Lindelöf). Allerdings ist es für eine gegebene Funktion $F : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die diese Eigenschaften erfüllt, keineswegs immer möglich, die Lösung der DGL exakt zu berechnen bzw. in geschlossener Form darzustellen. In solchen Situationen, die in Problemen der angewandten Mathematik sehr häufig auftreten, muss auf numerische Verfahren zurückgegriffen werden. Das Grundprinzip numerischer Lösungsverfahren für DGLen ist eine Diskretisierung des Problems, indem Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt werden. Aus einer Differentialgleichung wird so eine Differenzengleichung und eine approximative Lösung kann nun schrittweise konstruiert werden. Die einfachsten dieser numerischen Verfahren wollen wir hier kurz vorstellen.

Sei $x(t)$ der Wert der Lösung des Anfangswertproblems (1) zur Zeit t und $\Delta t > 0$ eine gewisse Schrittweite. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \int_t^{t+\Delta t} F(s, x(s)) ds. \quad (2)$$

Ersetzen wir nun das Integral durch eine Quadraturformel, so erhalten wir daraus bei bekannter Approximation u_i der Lösung zur Zeit t_i eine Approximation der Lösung u_{i+1} zur Zeit $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. Die einfachsten und zugleich geometrisch anschaulichsten Methoden hierfür sind

- das Eulersche Polygonzugverfahren (die „Methode der kleinen Schritte“):
 $u_{i+1} = u_i + \Delta t F(t_i, u_i)$, dabei wird das Integral in (2) durch eine Rechtecksfläche approximiert.
- das Heun-Verfahren: $u_{i+1} = u_i + \frac{1}{2} \Delta t \left(F(t_i, u_i) + F(t_{i+1}, u_i + \Delta t F(t_i, u_i)) \right)$ (Trapez-Regel).
- die Verwendung der Keplerschen Fassregel bzw. der Simpson-Regel zur Annäherung des Integrals durch eine Parabel (Runge-Kutta-Verfahren).

Die verschiedenen Verfahren unterscheiden sich in der Berechnung des Mittelwerts des Integranden in (2) im Intervall $[t_i, t_i + \Delta t]$. Während dazu beim (einstufigen) Eulerverfahren einfach der Funktionswert $F(t_i, u_i)$ am linken Rand des Intervalls verwendet wird, geht beim (zweistufigen) Heun-Verfahren auch eine Approximation des Funktionswerts $F(t_{i+1}, u_{i+1})$ am rechten Rand des Intervalls ein. Bei den Runge-Kutta-Verfahren handelt es sich um eine ganze Klasse von Verfahren, bei denen in jedem Schritt noch weitere Auswertungen an Zwischenstellenvorgenommen werden. Allgemein heißt ein Verfahren n -stufig, wenn in jedem Schritt n Funktionsauswertungen vorgenommen werden. Das klassische Runge-Kutta-Verfahren ist vierstufig und lässt sich problemlos in jeder Tabellenkalkulation implementieren:

Schritt i	t_i	u_i	$k_{1,i}$	$k_{2,i}$	$k_{3,i}$	$k_{4,i}$
0	t_0	x_0
1
2
3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

$$\begin{aligned}
 k_{1,i} &= F(t_i, u_i), \\
 k_{2,i} &= F\left(t_i + \frac{1}{2}\Delta t, u_i + \frac{1}{2}\Delta t k_{1,i}\right), \\
 k_{3,i} &= F\left(t_i + \frac{1}{2}\Delta t, u_i + \frac{1}{2}\Delta t k_{2,i}\right), \\
 k_{4,i} &= F(t_i + \Delta t, u_i + \Delta t k_{3,i}).
 \end{aligned}$$

Ausgehend von den Anfangsdaten (t_0, x_0) kommen wir zur nächsten Zeile mit den Vorschriften

$$\begin{aligned}
 t_{i+1} &= t_i + \Delta t, \\
 u_{i+1} &= u_i + \frac{\Delta t}{6} (k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}).
 \end{aligned}$$

Approximationsbehaftet kommt es bei numerischen Verfahren in jedem Rechenschritt zu einem lokalen Diskretisierungsfehler. Dieser ist beim klassischen Runge-Kutta-Verfahren kleiner als beim Euler- oder Heunverfahren. Die hier erwähnten Verfahren sind einfach in dem Sinn, dass es sich um explizite Einschrittverfahren handelt, d.h. die Rekursionsgleichung für u_{i+1} ist linear und es geht darin nur das Resultat des vorherigen Schritts u_i ein. Bei Mehrschrittverfahren werden zur Berechnung von u_{i+1} die Resultate aus mehreren vorhergehenden Schritten herangezogen, bei impliziten Verfahren sind die Rekursionsgleichungen für u_{i+1} nichtlinear. Ohne darauf näher einzugehen, sei nur erwähnt, dass es noch eine Vielzahl ausgefeilterer und komplexerer Verfahren gibt, häufig maßgeschneidert für spezielle DGL-Typen. Für unsere Zwecke ist jedoch das klassische Runge-Kutta-Verfahren völlig ausreichend. Es liefert etwa im Vergleich zum Eulerverfahren bereits deutlich „bessere“ Ergebnisse (genauere Approximationen bei gleicher Schrittweite), gleichzeitig lässt es sich für eine gegebene DGL aber immer noch mit nur minimalem Aufwand in jedem gängigen Tabellenkalkulationsprogramm realisieren.

3. Modellierung der gedämpften Pendelschwingung

3.1. Vorbemerkungen

Die DGL des harmonischen Oszillators ist eine der elementarsten und zugleich wichtigsten in der Physik. Ist die Rückstellkraft eines schwingungsfähigen mechanischen Systems in erster Näherung proportional zu seiner Auslenkung von der Ruhelage, so kann das System zumindest für kleine Schwingungsamplituden als harmonischer Oszillator betrachtet werden. Ein Fadenpendel, das nur geringfügig von seiner Gleichgewichtslage ausgelenkt wird, stellt eine einfache Realisierung eines harmonischen Oszillators dar. Vor allem bei großen Auslenkungen weicht das reale Verhalten jedoch von der idealisierten DGL des harmonischen Oszillators ab. Nichtlinearitäten in der Rückstellkraft machen sich ebenso bemerkbar wie die Dämpfung der Schwingung aufgrund des Luftwiderstands.

Während das Miteinbeziehen nichtlinearer und dissipativer Effekte in das DGL-Modell die analytische Behandlung desselben zweifellos außerordentlich erschwert, spielt es für das Implementieren bzw. Anwenden eines numerischen Lösungsverfahrens so gut wie keine Rolle, ob zusätzliche oder kompliziertere Terme in der DGL auftreten (solange die Komplexität des Modells bzw. die Anzahl der Rechenschritte nicht die Leistungsfähigkeit des zur Berechnung eingesetzten Computers über Gebühr strapazieren).



Abb. 1: Realisierung eines Fadenpendels mit einem Smartphone zur Messdatenerfassung.

Selbst mit den einfachsten numerischen Verfahren lässt sich ein breites Spektrum an DGLen aus der Physik und anderen Wissenschaften behandeln. Da in den DGL-Modellen dabei weitgehend auf Idealisierungen und Vereinfachungen verzichtet werden kann, lassen sich die Berechnungen oft auch experimentell überprüfen. Vor allem immer erschwinglicher werdende elektronische Sensoren, die zudem ohnehin schon in den meisten Smartphones eingebaut sind, eröffnen völlig neue Möglichkeiten, DGL-Modelle an der Realität zu „testen“ und im Sinne eines Modellierungskreislaufs zu verfeinern. Dies soll hier am Beispiel eines zum Pendel umfunktionierten Smartphones demonstriert werden.

3.2. Die Bewegungsgleichung des realen Pendels

Das mathematische und das physikalische Pendel

Das mathematische Pendel ist ein idealisiertes Fadenpendel, bei dem ein in seinem Schwerpunkt aufgehängter Pendelkörper der Masse m an einer masselosen Pendelstange der Länge l reibungsfrei in einer vertikalen Ebene unter dem Einfluss der Schwerkraft schwingen kann. Insbesondere wird auch der Luftwiderstand vernachlässigt. Ist α der Auslenkungswinkel eines solchen Pendels (siehe Abbildung 1a), so lautet die Bewegungsgleichung des Pendels $a_T = -g \sin \alpha$. Hier ist a_T die Tangentialkomponente der Beschleunigung des Pendelkörpers und $g = 9.80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Aus $a_T = l \ddot{\alpha}$ folgt somit $\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0$. Diese DGL führt auf ein elliptisches Integral und ist nicht elementar lösbar. Für kleine Auslenkungen kann jedoch die Approximation $\sin \alpha \approx \alpha$ („Kleinwinkelnäherung“) verwendet werden, wodurch wir die DGL des idealen harmonischen Oszillators erhalten,

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \alpha = 0. \quad (3)$$

Die Lösung dieser DGL ist eine harmonische Schwingung mit einer Periode, die nur von der Pendellänge abhängt ($T = 2\pi\sqrt{l/g}$).

Auch das physikalische Pendel ist ein theoretisches Modell, das nicht den realen Verhältnissen entspricht. Hier werden im Gegensatz zum mathematischen Pendel aber auch die Größe und Form des Pendelkörpers berücksichtigt. Die entsprechende DGL lautet

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgd}{I} \alpha = 0, \quad (4)$$

wobei d der Abstand zwischen Aufhängungs- und Massenmittelpunkt des gesamten Pendels (Pendelstange und -körper) ist und I dessen Massenträgheitsmoment bezüglich des Aufhängungspunkts. Aus mathematischer Sicht unterscheiden sich die DGLen (3) und (4) nicht, beim physikalischen Pendel wird lediglich mit einer effektiven Länge $l_{\text{eff}} = \frac{I}{md}$ statt der tatsächlichen Länge l des Pendels gerechnet.

Das reale Pendel

Die DGLen (3) und (4) repräsentieren in zweifacher Hinsicht Idealisierungen eines realen Pendels. Die Näherung $\sin \alpha \approx \alpha$ kommt einer Linearisierung der DGL gleich, die nur für sehr kleine Auslenkungen das Verhalten eines realen Pendels wiedergibt. Je größer die Auslenkung eines realen Pendels, umso stärker machen sich nichtlineare Effekte bemerkbar, die in diesen vereinfachten Modellen nicht berücksichtigt werden. Darüber hinaus werden auch jegliche Dämpfungseffekte ausgeblendet. Einmal angestoßen, würden unsere idealisierten Pendel ewig weiterschwingen. Ein reales Pendel kommt ohne weitere Energiezufuhr aber früher oder später zum Stillstand. Verantwortlich dafür sind vor allem der Luftwiderstand und, je nach Konstruktion des Pendels, die Lagerreibung in der Aufhängung. Erweitern wir unser Modell um einen von der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha}$ abhängigen Dämpfungsterm für den Luftwiderstand und verzichten auf die Kleinwinkelnäherung, dann kommen wir der Realität schon näher und erhalten

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgd}{I} \sin \alpha + c \dot{\alpha} |\dot{\alpha}| = 0.$$

Die Konstante c hängt von den Abmessungen und der Form des Pendels ab. Es gilt $c = \frac{c_w A}{2m} \rho$, wobei ρ die Luftdichte, A die der Luftströmung ausgesetzte Querschnittsfläche des Pendels, m dessen Masse und der sogenannte c_w -Wert der dimensionslose Strömungswiderstandsbeiwert ist. Dieser kann für einfache Körperformen aus Tabellen entnommen werden und ist umso kleiner, je „aerodynamischer“ ein Körper geformt ist. Die Lagerreibung könnte durch einen weiteren Bremsterm modelliert werden, der proportional zur Winkelgeschwindigkeit ist.

3.3. Messdatenerfassung mittels Smartphone

Alle gängigen Smartphones sind mittlerweile mit äußerst empfindlichen Beschleunigungssensoren ausgestattet. Es gibt kostenlose Apps, die die Sensordaten in Millisekunden-Intervallen auslesen und als csv-Datei abspeichern. Smartphones lassen sich daher hervorragend als Messinstrumente einsetzen. In unserem Experiment wurde ein Smartphone in eine Kunststoffbox gelegt und an einer etwa zweieinhalb Meter langen Schnur montiert, die an einer Deckenleuchte befestigt wurde. Durch die Lage des Smartphones in der Box und die spezielle Aufhängung ist gewährleistet, dass das Display stets senkrecht zum Pendelfaden orientiert ist. Wird nun die Beschleunigungskomponente a_z senkrecht zur Displayebene aufgezeichnet, dann sind Rotationen des Smartphones irrelevant, da sie vom Sensor für die z -Komponente der Beschleunigung gar nicht erfasst werden. Nach dem Experiment wurde die csv-Datei auf einen Rechner übertragen, ein Plot der erhaltenen Messdaten ist in Abbildung 2 zu sehen.

3.4. Numerische Berechnungen und Vergleich mit den Messdaten

Umschreiben in ein System 1. Ordnung

Für das im Experiment verwendete Pendel wird aufgrund seiner Geometrie (siehe Abbildung 1b) die Dämpfung überwiegend vom Luftwiderstand verursacht, sodass wir andere Reibungsterme vernachlässigen. Weiters gilt in sehr guter Näherung $\frac{mgd}{I} \approx \frac{g}{l}$. Wir wollen daher die DGL

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \sin \alpha + c \dot{\alpha} |\dot{\alpha}| = 0. \quad (5)$$

numerisch mit dem (klassischen) Runge-Kutta-Verfahren lösen. Zu diesem Zweck schreiben wir (5) in ein DGL-System 1. Ordnung um. Dazu setzen wir $\omega = \dot{\alpha}$ (ω ist die Winkelgeschwindigkeit) und erhalten

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{g}{l} \sin \alpha - c \omega |\omega|. \end{aligned} \quad (6)$$

Mit $F(\alpha, \omega) = \begin{pmatrix} \omega \\ -\frac{g}{l} \sin \alpha - c \omega |\omega| \end{pmatrix}$ sieht das Runge-Kutta-Verfahren für diese DGL wie folgt aus:

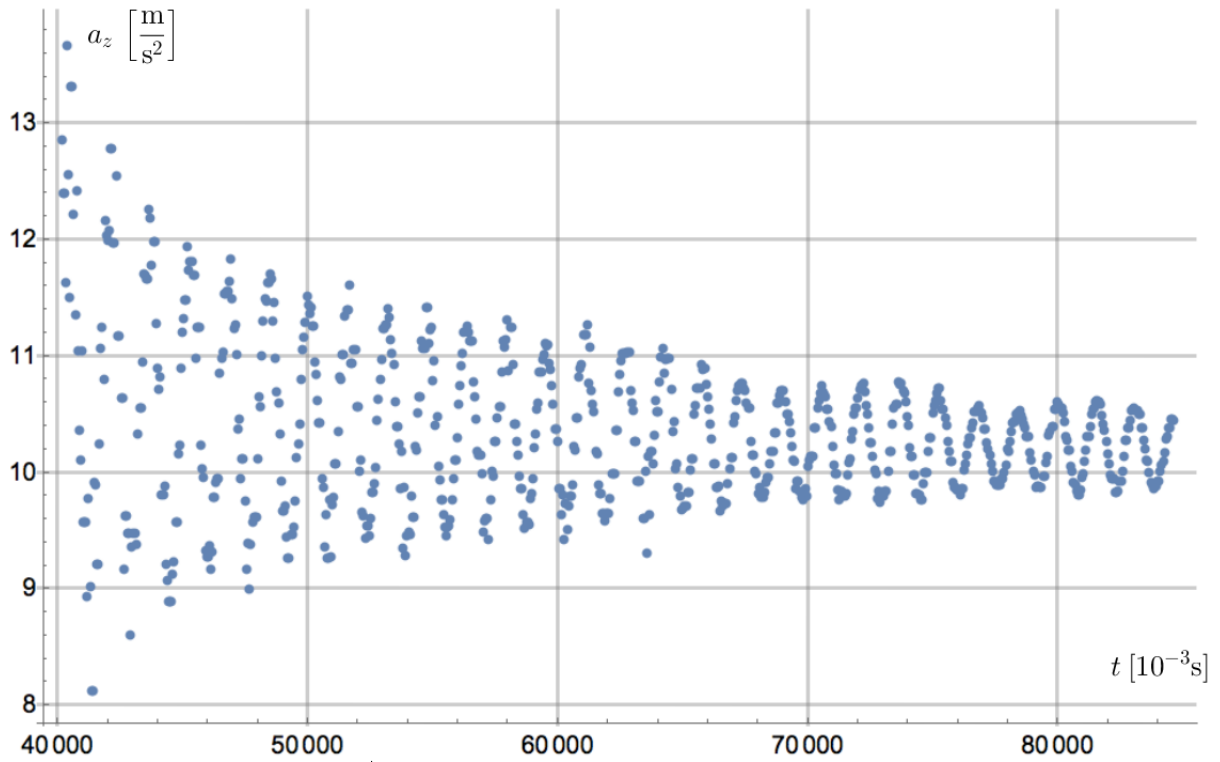


Abb. 2: Messdaten für das Smartphone-Pendel.

Wert der Approximation zur Zeit $t_{i+1} = t_i + \Delta t$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i+1} \\ \omega_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \omega_i \end{pmatrix} + \frac{\Delta t}{6} \begin{pmatrix} k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i} \\ k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} k_{1,i} &= F(\alpha_i, \omega_i), \\ k_{2,i} &= F\left((\alpha_i, \omega_i) + \frac{1}{2}\Delta t k_{1,i}\right), \\ k_{3,i} &= F\left((\alpha_i, \omega_i) + \frac{1}{2}\Delta t k_{2,i}\right), \\ k_{4,i} &= F((\alpha_i, \omega_i) + \Delta t k_{3,i}) \end{aligned}$$

Dieser Algorithmus lässt sich für gegebene Anfangsdaten (α_0, ω_0) und Werte für l und c bequem in jeder Tabellenkalkulation realisieren. Die berechneten Lösungskurven können dann mit den mit dem Smartphone gemessenen Daten verglichen werden. Anhand dieses Vergleichs mit realen Daten kann das Modell sukzessive verbessert werden.

Vergleich der numerischen Lösung mit den Messdaten

Bevor wir die gemessenen Punkte mit (approximativen) Lösungen der DGL vergleichen, ist jedoch zu klären, wie die gemessene Beschleunigungskomponente $t \mapsto a_z(t)$ mit der Lösung $t \mapsto \alpha(t)$ des DGL-Systems (6) zusammenhängt. Das Smartphone erfährt orthogonal zur Displayebene neben einer Komponente der Erdbeschleunigung auch eine Zentrifugalbeschleunigung $a_{ZF} = l \dot{\alpha}^2 = l \omega^2$. Insgesamt ist $a_z = g_z + a_{ZF} = g \cos \alpha + l \omega^2$ (siehe Abbildung 1c). Insbesondere oszilliert $a_z(t)$ damit doppelt so schnell wie $\alpha(t)$ (jedenfalls für Auslenkungen mit $|\alpha(t)| \leq \pi/2$ ($= 90^\circ$)). Die Messdaten für $a_z(t)$ sind also mit den durch

$$a_{z,i} = g \cos \alpha_i + l \omega_i^2$$

gegebenen Werten zu vergleichen.

Für die in Abbildung 3 gemeinsam mit den gemessenen Datenpunkten dargestellte numerische Lösung wurde das DGL-System (6) für Anfangsdaten $\alpha_0 = 32^\circ$ ($\approx \frac{9\pi}{5}$) und $\omega_0 = 0$ sowie eine Pendellänge $l = 2.4\text{m}$ und einen Luftwiderstandskoeffizienten $c = 0.07 \frac{1}{\text{m}}$ gelöst. Aufgetragen ist die Funktion $t \mapsto a_z(t)$, die der auf das Smartphone einwirkenden Beschleunigungskomponente senkrecht zur Displayebene entspricht. Die Werte für α_0 und l wurden gemessen, jener für c durch Vergleich der Lösungen

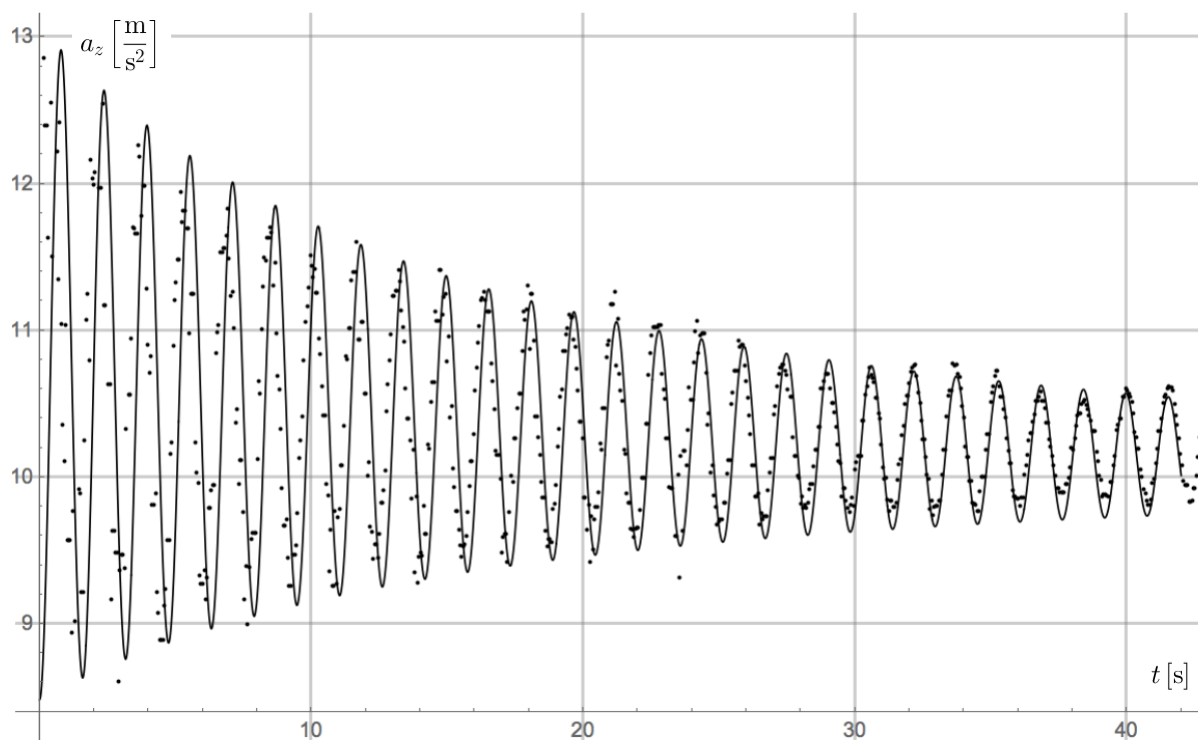


Abb. 3: Vergleich der numerischen Lösung (interpolierte Kurve) mit den Messdaten (Punkte).

mit den Messdaten ermittelt. Diese nachträgliche Parameteranpassung ließe sich aber auch eliminieren, wenn der Luftwiderstandsterm genauer aufgeschlüsselt wird und alle darin eingehenden Größen direkt gemessen bzw. aus Tabellen entnommen werden. Eine technische Schwierigkeit stellt das Identifizieren des Beginns der Pendelschwingung in den aufgezeichneten Daten dar, da die Datenerfassung manuell und damit vor dem Loslassen des Pendels aus seiner Anfangsposition gestartet werden muss. Der Schwingungsbeginn ist dabei zeitlich nicht so leicht mit der erforderlichen Genauigkeit aufzulösen. Dieses Problem ließe sich dadurch beheben, dass auch die im Smartphone eingebauten Neigungssensoren ausgelesen werden.

3.5. Mögliche Stufen der Modellierung und Diskussion

Nach Durchführung des Experiments und Übertragung der erfassten Messdaten auf einen Rechner werden diese zunächst grafisch dargestellt (etwa mithilfe einer Tabellenkalkulation). Daran anschließen können die folgenden Modellierungsschritte:

I. Phänomenologisches Modell:

- a) Funktionsanpassung: Entwicklung eines die Messdaten beschreibenden mathematischen Modells, indem eine zeitabhängige Funktion gesucht wird, die den gemessenen Daten am besten entspricht. Das Spektrum möglicher Zugänge reicht hier von einer groben und rein qualitativen Beschreibung („abklingende Sinusfunktion“) bis hin zu einer genauen Angabe eines Funktionsterms, der mit Technologieunterstützung gefunden und mit den Daten verglichen wird. Jedenfalls lassen sich durch eine mathematische Betrachtung der Messdaten bereits einige quantitative Aussagen über den aufgezeichneten Schwingungsvorgang gewinnen (Abnahmerate der Amplitude, Schwingungsdauer, etc.).
- b) Test des Modells: Das in a) gewonnene, rein phänomenologische Modell enthält gewisse Parameter, die relativ leicht den Anfangsdaten der Schwingung zugeordnet werden können. Anhand des Modells lässt sich nun eine Vorhersage machen, wie der Schwingungsvorgang für eine viel kleinere oder viel größere Anfangsauslenkung aussehen sollte. Diese Vorhersage kann dann umgehend experimentell überprüft werden. Insbesondere für große Auslenkungen

würde sich das Modell zwangsläufig als unbrauchbar erweisen, da es die physikalischen Zusammenhänge völlig außer acht lässt.

II. Physikalisches Modell:

- a) Modell ohne Reibung: Es kann zunächst der Zusammenhang zwischen den Messwerten und den relevanten physikalischen Größen diskutiert werden (z.B. wie die gemessene Beschleunigungskomponente mit dem Auslenkungswinkel zusammenhängt). Hierbei spielen bereits Begriffe aus der Physik wie die Zentrifugalbeschleunigung eine wichtige Rolle. Mithilfe einfacher physikalischer Zusammenhänge lässt sich rasch die DGL $\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0$ des ungedämpften Pendels aufstellen. Diese kann nun entweder direkt mit einem numerischen Verfahren gelöst oder mit der Kleinwinkelnäherung $\sin \alpha \approx \alpha$ in die DGL (3) des harmonischen Oszillators übergeführt werden. In jedem Fall zeigen die Lösungen dieser DGLen kein Abklingverhalten. Dieses Unvermögen eines reibungsfreien Modells, die Schwingungen eines realen Pendel abzubilden, könnte nun Ausgangspunkt einer Diskussion der die Dämpfung hervorrufoenden Prozesse und deren mathematischer Beschreibung sein.
- b) Modell mit Reibung: Berücksichtigen wir die durch den Luftwiderstand (bzw. die Lagerreibung) verursachte Dämpfung des Pendels über einen entsprechenden Term in der DGL, so erhalten wir die realistischere DGL (5). Diese ist zwar ein wenig komplizierter, kann aber, wie in 3.4 dargelegt, problemlos in einer Tabellenkalkulation numerisch gelöst werden. Ein solches Modell ist nicht nur dazu in der Lage, die gemessenen Daten gut zu reproduzieren, sondern liefert auch brauchbare Vorhersagen über zu erwartende Messdaten bzw. -kurven für verschiedenste Anfangszustände des Pendels.

Ein wesentlicher Vorteil des hier vorgestellten Modellierungsproblems liegt darin, dass die entwickelten mathematischen Modelle trotz einer gewissen Komplexität immer noch unmittelbar im Experiment überprüft werden können. Beim schrittweisen Erarbeiten eines funktionierenden Modells wird erfahrbar, wie physikalisches Verständnis und mathematische Methoden zusammenspielen, um physikalische Vorgänge äußerst präzise in mathematischen Modellen abzubilden. Darüber hinaus kann dieser Prozess für Schüler*innen auch kleine Erfolgserlebnisse bereithalten, wenn das Modell schließlich Vorhersagen macht, die einer experimentellen Überprüfung standhalten und die numerisch berechneten Kurven für verschiedenste Anfangszustände mit den gemessenen Daten im Einklang stehen. Es wird dabei auch vermittelt, was es eigentlich bedeutet, ein mathematisches Modell für ein reales Phänomen zu entwickeln und dass in dieses immer auch Kenntnisse aus anderen Disziplinen einfließen müssen. Grundlage einer solchen Modellierung im Mathematikunterricht sind natürlich numerische Verfahren für das Lösen von DGLen. Dafür empfiehlt sich zuallererst das Eulersche Polygonzugverfahren (die „Methode der kleinen Schritte“), das sehr anschaulich motiviert bzw. im Unterricht entwickelt werden kann.

4. Modellierung des Falls aus großer Höhe

4.1. Vorbemerkungen

Im Rahmen der Newtonschen Physik verstehen wir unter einem freien Fall die Bewegung eines Körpers, auf den keine Kräfte außer der Gravitationskraft wirken.¹ Ein im freien Fall befindlicher Körper erlebt den Zustand der Schwerelosigkeit. Obwohl in der Umgangssprache auch der „ungebremste“ Fall eines Körpers innerhalb der Erdatmosphäre als freier Fall bezeichnet wird, handelt es sich dabei nicht um einen freien Fall im physikalischen Sinn. Die Luftteilchen der Atmosphäre üben durch Stöße eine gegen die Bewegungsrichtung wirkende Kraft auf den fallenden Körper aus. Der auf die Erde fallende Körper ist also neben der Gravitationskraft immer auch einer Luft- bzw. Strömungswiderstandskraft ausgesetzt und daher nicht im freien Fall.

¹ In der allgemeinen Relativitätstheorie wird die Gravitation nicht mehr als Kraft, sondern als Krümmung der Raumzeit beschrieben, sodass sich ein Körper genau dann im freien Fall befindet, wenn keine Kraft auf ihn wirkt. Der Körper folgt dann einer Geodäte in der Raumzeit.

Außerhalb der Erdatmosphäre herrscht allerdings nahezu Vakuum, sodass sich etwa Satelliten oder die internationale Raumstation (International Space Station, kurz ISS) tatsächlich so gut wie im freien Fall befinden. Natürlich trifft dies erst recht für Himmelskörper wie den Mond oder die Planeten zu, deren Bewegung ausschließlich durch Gravitationskräfte bestimmt wird. Andere Kräfte wie etwa die durch den Strahlungsdruck des Sonnenwinds verursachte Kraft auf Objekte im Sonnensystem sind um so viele Größenordnungen kleiner, dass sie getrost vernachlässigt werden können.

4.2. Die Bewegungsgleichung des Falls aus großer Höhe

Die Bewegungsgleichung eines fallenden Körpers lässt sich ganz leicht mit Hilfe des zweiten Newtonschen Gesetzes aufstellen. Dieses besagt, dass ein Körper der Masse m durch eine auf ihn einwirkende Kraft \vec{F} eine Beschleunigung \vec{a} entsprechend $m\vec{a} = \vec{F}$ erfährt. Wirken mehrere Kräfte auf den Körper, so ist mittels Vektoraddition einfach die resultierende Kraft zu bilden. Für einen antriebslos in der Erdatmosphäre fallenden Körper gilt daher

$$m\vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_w, \quad (7)$$

wobei \vec{F}_g die Gravitations- bzw. Erdanziehungskraft und \vec{F}_w die Luft- bzw. Strömungswiderstandskraft bezeichnet. Die Größe der zum Erdmittelpunkt hin gerichteten Kraft \vec{F}_g ist proportional zur Masse m des Körpers und indirekt proportional zum Quadrat seiner Entfernung vom Erdmittelpunkt. Der Proportionalitätsfaktor zwischen Masse und Kraft ist die Erdbeschleunigung, die auf der Erdoberfläche den Wert $g = 9.80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ hat. In einer Höhe h über der Erdoberfläche ist die Erdanziehung jedoch geringer, es gilt dort

$$g_E(h) = g \cdot \left(\frac{R_E}{R_E + h} \right)^2 = g \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{h}{R_E}} \right)^2,$$

wobei $R_E = 6371 \text{ km}$ der mittlere Erdradius ist. Offenbar kann für $h \ll R_E$ in guter Näherung $g_E(h) \approx g$ gesetzt werden. Selbst auf Höhe der Umlaufbahn der ISS (ca. 400 km) ist der Unterschied zwischen $g_E(h)$ und g verschwindend gering und in der Regel vernachlässigbar, weshalb wir für alle folgenden Berechnungen g statt $g_E(h)$ heranziehen.

Weiters nehmen wir der Einfachheit halber an, dass der gesamte Fall des Körpers lotrecht bzw. radial zum Erdmittelpunkt hin erfolgt. Dies ist gewährleistet, wenn der Fall aus einer (perfekten) Ruheposition gestartet wird (ohne „seitliches Abstoßen“) und die Atmosphäre statisch ist. Genau genommen treten auch in den oberen Atmosphärenschichten Winde mit teils sehr hohen Geschwindigkeiten auf (sogenannte Jetstreams), die zu einer nicht unerheblichen Abweichung der Falllinie von der Lotrechten führen können. Diese Effekte werden hier ignoriert.

Unter diesen Annahmen wird nur eine einzige Koordinate zur Beschreibung des Falls benötigt, die Höhe h über dem Erdboden (bzw. der „Luftstand“). Die vektorielle Beziehung (7) lautet in diesem (eindimensionalen) Koordinatensystem

$$\ddot{h}(t) = -g + f_w(h(t), \dot{h}(t)),$$

wobei $f_w = \frac{1}{m}F_w$ und $\dot{h}(t) = \frac{d}{dt}h(t)$ (das Minus vor der Erdbeschleunigung g ergibt sich, da diese zu einer Abnahme der Höhe führt). Die durch den Strömungswiderstand hervorgerufene Bremsbeschleunigung f_w hängt sowohl von \dot{h} ab als auch von h selbst (da die Atmosphärendichte und damit der Luftwiderstand mit abnehmender Höhe zunimmt). Für den (im Sinne der Physik) freien Fall ist $f_w = 0$ (Vakuum) und die Lösung der Differentialgleichung kann unmittelbar angegeben werden. Um ein gutes DGL-Modell des realen Falls aus großer Höhe zu erhalten, müssen wir nun den Strömungswiderstandsterm $f_w(h(t), \dot{h}(t))$ genauer spezifizieren.

4.3. Modellierung des Strömungswiderstands

Es ist bekannt, dass der Strömungswiderstand mit der Geschwindigkeit zunimmt. Dies lässt sich etwa beim Radfahren unmittelbar erleben. Bei laminarer Strömung (keine Verwirbelung der Stromlinien) ist dieser Zusammenhang linear, bei turbulenter Strömung hingegen im Wesentlichen quadratisch. Luftströmungen sind nur bei sehr kleinen Geschwindigkeiten laminar, selbst gemütliches Gehen fällt schon klar in den Bereich turbulenter Strömung. Auch die Nichtlinearität der Beziehung zwischen Strömungswiderstand und Geschwindigkeit kann mit einem Fahrrad überprüft werden. Die Fahrgeschwindigkeit von 30km/h auf 40km/h zu erhöhen erfordert deutlich mehr Energie als eine Erhöhung von 10km/h auf 20km/h; eine Geschwindigkeit von 40km/h zu halten ist etwa viermal so anstrengend wie das Fahren mit 20km/h. Neben der Geschwindigkeit geht in den Strömungswiderstand aber auch die Dichte des Mediums, in dem sich der Körper bewegt, ein (je höher die Dichte, umso größer der Widerstand). Schließlich spielt auch noch die Geometrie des Körpers eine Rolle. Der Strömungswiderstand ist proportional zur Angriffsfläche; die Form ist jedoch auch relevant, wie sich gut mit einer Halbschale illustrieren lässt, die der Strömung auch bei gleicher Angriffsfläche je nach Orientierung (konvex oder konkav) einen stark unterschiedlichen Widerstand bietet. Dieser Einfluss der Form des Körpers wird durch den dimensionslosen Strömungswiderstandsbeiwert c_w berücksichtigt.² Insgesamt gilt

$$f_w = \frac{c_w A}{2m} \rho v^2, \quad (8)$$

wobei A die Angriffsfläche, ρ die Dichte des strömenden Mediums, v die Geschwindigkeit und m die Masse des Körpers ist. Gleichung (8) ist als Definition des c_w -Werts zu verstehen, d.h. etwaige Abweichungen von einer quadratischen Geschwindigkeitsabhängigkeit des Strömungswiderstands zeigen sich in einer (wenn auch meist geringen) Geschwindigkeitsabhängigkeit des c_w -Werts. Für Fallschirmspringer*innen ist während des Falls nur das Produkt $c_w A$ direkt beeinflussbar. Durch Öffnen des Schirms vergrößert sich vor allem die Angriffsfläche, aber auch der c_w -Wert. Bis zum Öffnen des Schirms ist für die Geschwindigkeit allerdings die Atmosphärendichte die maßgebliche Größe. Diese ändert sich während eines Falls aus der Stratosphäre um zwei Größenordnungen. Eine der Realität nahekommende Modellfunktion für die Atmosphärendichte $h \mapsto \rho(h)$ zu konstruieren, ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

Modellierung der Atmosphärendichte

Ein Charakteristikum von Fallschirmsprüngen aus der Stratosphäre ist die deutliche Ausprägung eines Geschwindigkeitsmaximums, das relativ früh in der Fallphase auftritt. Die mit Fortdauer des Falls immer dichter werdende Atmosphäre bremst den Fall zusehends, sodass die Fallgeschwindigkeit in der Troposphäre typischerweise nur noch einen Bruchteil des zuvor erreichten Maximums beträgt. Unter der Annahme konstanter Temperatur (isotherme Atmosphäre) lässt sich aus der hydrostatischen Grundgleichung und dem idealen Gasgesetz die barometrische Höhenformel

$$\rho(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{Mg}{RT}h} = \rho_0 \cdot e^{-\frac{h}{h_S}}$$

herleiten. Hier ist M die (mittlere) molare Masse eines Atmosphärenteilchens, R die universelle Gaskonstante und T die absolute Temperatur der Atmosphäre. Typische Werte der Luftdichte ρ_0 auf Meereshöhe und der Skalenhöhe $h_S = \frac{RT}{Mg}$ sind $\rho_0 \approx 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ und $h_S \approx 8.4\text{km}$. Die Annahme konstanter Temperatur ist eine Idealisierung, denn tatsächlich ändert sich die Atmosphärentemperatur mit der Höhe beträchtlich. In der Troposphäre (bis etwa 15km Höhe) nimmt sie ca. um 6°C pro km ab und erreicht etwa -50°C in der Tropopause. In der Stratosphäre (ca. 15-50km) ist der vertikale Temperaturgradient zunächst neutral, die Temperatur steigt dann aber bis zur Tropopause wieder an. In der Mesosphäre und Thermosphäre wiederholt sich dieses Verhalten (siehe Abbildung 4).

Um über einen großen Höhenbereich eine realitätsnahe Modellfunktion $h \mapsto \rho(h)$ zu erhalten, verwenden wir deshalb tabellierte Werte der Standardatmosphäre 1976, die sich auf die mittleren atmosphärischen

² Der c_w -Wert wird experimentell ermittelt und ist unter anderem in der Automobilindustrie von Bedeutung. Er ist auch auf den Typenscheinen von Fahrzeugen zu finden. Typische Werte für Autos liegen zwischen 0.25 und 0.5.

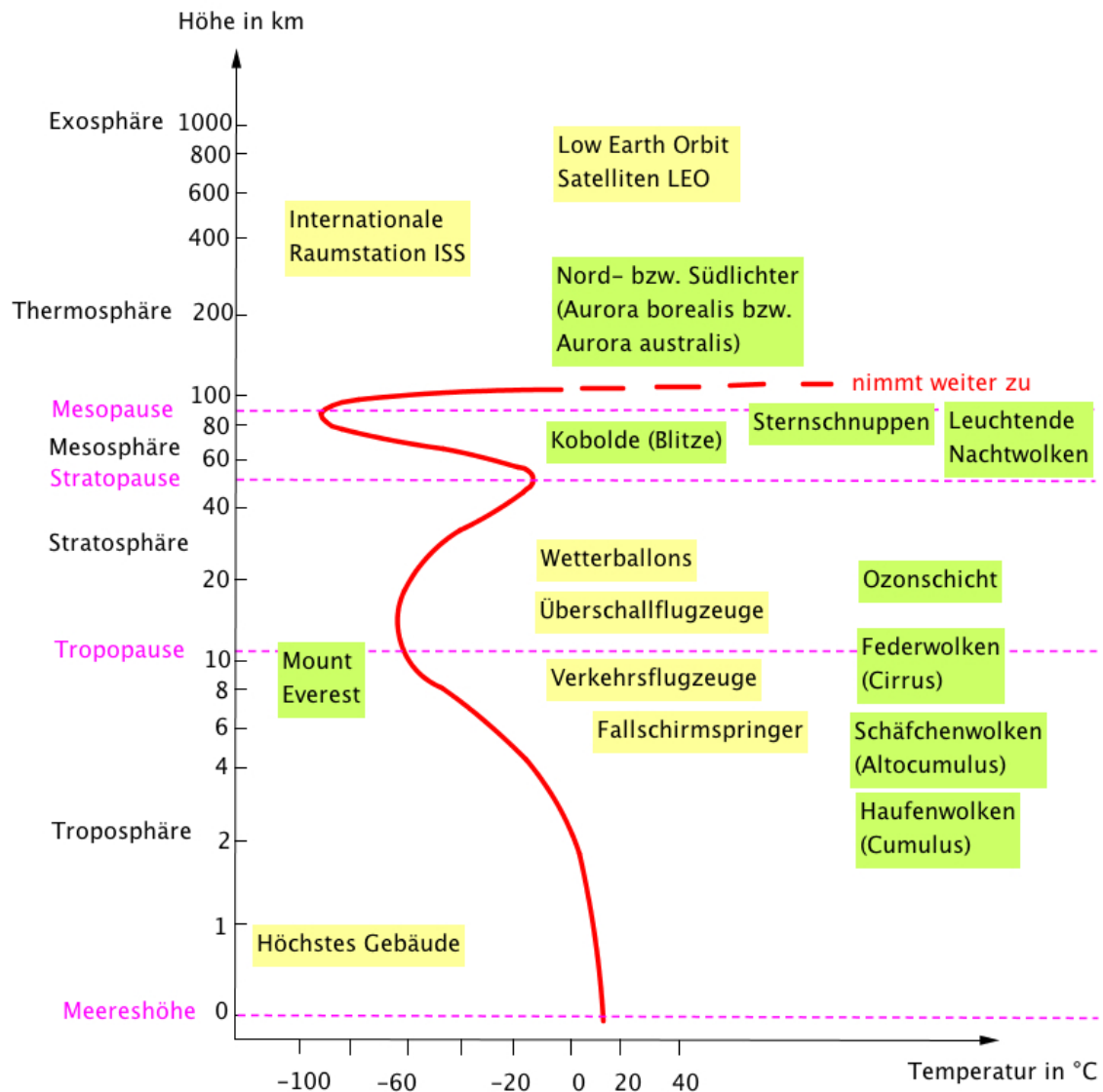
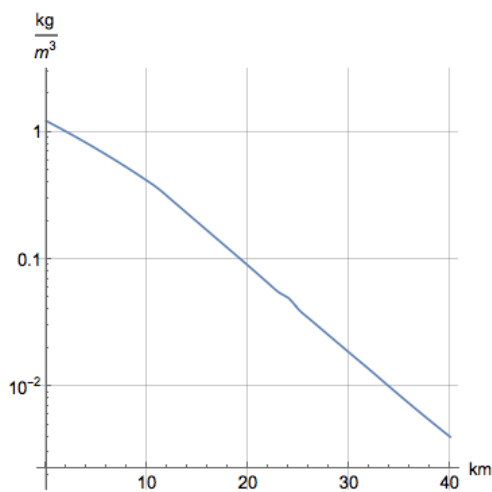
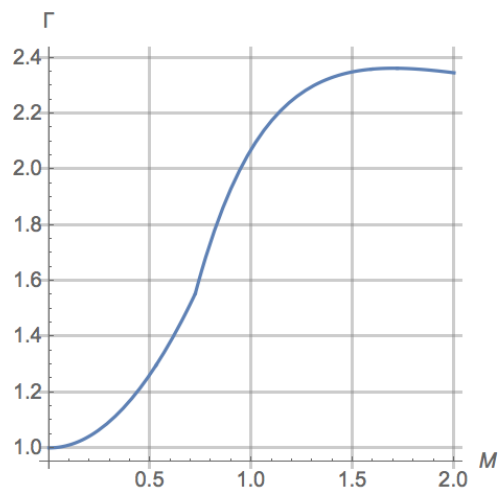


Abb. 4: Schichtung und Temperaturverlauf in der Erdatmosphäre (schematisch).



(a) Modellfunktion der Atmosphärendichte $h \mapsto \rho(h)$,



(b) Modellfunktion $M \mapsto \Gamma(M)$ zur Berücksichtigung der „Schallmauer“.

Abb. 5: Atmosphärendichte in der Standardatmosphäre 1976 und Modellfunktion für die Abhängigkeit des c_w -Werts von der Machzahl.

Verhältnisse bei 45° nördlicher Breite bezieht und von stückweise konstanten Temperaturgradienten ausgeht (Etling, 2008, S. 71). Aus den Tabellen der Standardatmosphäre (NOAA, 1976) entnehmen wir dazu Dichtewerte in Schritten von 1km für Höhen bis 40km und konstruieren daraus $h \mapsto \rho(h)$ durch Interpolation der Daten mit kubischen Splines. Für die Standardatmosphärendichte auf Meereshöhe gilt $\rho(0) = 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Modellierung des Strömungswiderstandskoeffizienten c_w

Der Wert des Strömungswiderstandskoeffizienten c_w ist zwar in erster Linie durch die Form des umströmten Körpers bestimmt, er ist jedoch keineswegs konstant, sondern hängt vom Turbulenzverhalten der Strömung ab, das sich über größere Geschwindigkeitsbereiche durchaus ändern kann. Eine signifikante Änderung tritt bei Überschreiten der Schallgeschwindigkeit auf. Dabei bilden sich um das bewegte Objekt Stoßwellen aus, wodurch der aerodynamische Widerstand stark ansteigt. Nach Überschreiten der Schallgeschwindigkeit sinkt der Widerstand wieder ab, bleibt aber höher als im Unterschallbereich. Um dies in unserem Modell zu berücksichtigen, verwenden wir den in (Carter et al., 2009) empirisch ermittelten relativen Anstieg des Strömungswiderstands in Abhängigkeit von der Machzahl M ,

$$\Gamma(M) = \begin{cases} 1 + 1.06M^2 & 0 \leq M \leq 0.722, \\ 2.17 + 4.95e^{-2.2(M+0.35)} - 20.99e^{-2.2(M+0.35)} & 0.722 < M. \end{cases}$$

Der zugehörige Graph ist in Abbildung 5b dargestellt und stimmt qualitativ und quantitativ gut mit den Kurven in (Bailey & Hiatt, 1971, S. 48-49) überein. Die Machzahl ist definiert als das Verhältnis der Geschwindigkeit des Objekts zur Schallgeschwindigkeit.³ Da die Schallgeschwindigkeit von der Lufttemperatur und damit von der Höhe abhängt, gilt dies auch für die Machzahl eines fliegenden Objekts.

Für den Strömungswiderstandskoeffizienten erhalten wir damit

$$c_w(h, \dot{h}) = c_{w0} \Gamma(M(h, \dot{h})),$$

wobei c_{w0} als hypothetischer Grenzwert für kleine Geschwindigkeiten zu verstehen ist. Für die Machzahl gilt $M(h, \dot{h}) = |\dot{h}|/c_s(h)$ mit der Schallgeschwindigkeit $c_s(h)$ auf Höhe h in der Erdatmosphäre. Die Funktion $h \mapsto c_s(h)$ wurde wiederum durch Interpolation der entsprechenden Daten in den Tabellen für die Standardatmosphäre gewonnen.

Unser Modell des Strömungswiderstandsterms ist hiermit vollständig und wir haben

$$f_w(h, \dot{h}) = \frac{c_w(h, \dot{h})A}{2m} \cdot \rho(h) \cdot \dot{h}^2 = \underbrace{\frac{c_{w0}A}{2m}}_{b_0} \cdot \Gamma(h, \dot{h}) \cdot \rho(h) \cdot \dot{h}^2.$$

4.4. Numerische Berechnungen und Vergleich mit realen Daten

Umschreiben in ein System 1. Ordnung

Wir wollen die DGL

$$\ddot{h}(t) = -g + \frac{c_{w0}A}{2m} \cdot \Gamma(h(t), \dot{h}(t)) \cdot \rho(h(t)) \cdot \dot{h}(t)^2 \quad (9)$$

numerisch mit dem (klassischen) Runge-Kutta-Verfahren lösen. Dazu ist es erforderlich, die DGL (9) in ein DGL-System 1. Ordnung umzuschreiben. Wir definieren $v = -\dot{h}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \dot{h} &= -v \\ \dot{v} &= g - \frac{c_{w0}A}{2m} \cdot \Gamma(h, v) \cdot \rho(h) \cdot v^2 \end{aligned}$$

³ Zum Beispiel bedeutet „Mach 1“, dass sich das Objekt genau mit Schallgeschwindigkeit bewegt (entsprechend wäre „Mach 2“ die doppelte Schallgeschwindigkeit usw.).

mit Anfangsbedingungen $(h(0), v(0)) = (h_0, v_0)$ (die Funktion $v \mapsto \Gamma(h, v)$ ist gerade). Setzen wir

$$F(h, v) = \begin{pmatrix} -v \\ g - \frac{c_{w0} A}{2m} \cdot \Gamma(h, v) \cdot \rho(h) \cdot v^2 \end{pmatrix},$$

dann nimmt der Runge-Kutta-Algorithmus für dieses DGL-System folgende Gestalt an:

Wert der Approximation zur Zeit $t_{i+1} = t_i + \Delta t$:

$$\begin{pmatrix} h_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_i \\ v_i \end{pmatrix} + \frac{\Delta t}{6} (k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i})$$

$$\begin{aligned} k_{1,i} &= F(h_i, v_i), \\ k_{2,i} &= F\left(h_i, v_i + \frac{1}{2}\Delta t k_{1,i}\right), \\ k_{3,i} &= F\left(h_i, v_i + \frac{1}{2}\Delta t k_{2,i}\right), \\ k_{4,i} &= F\left(h_i, v_i + \Delta t k_{3,i}\right) \end{aligned}$$

Dieses Rechenschema lässt sich in den meisten Tabellenkalkulationen problemlos implementieren.

Der Stratosphärensprung vom 14. Oktober 2012

Um unser DGL-Modell für den Fall aus großer Höhe zu testen, wenden wir es auf reale Daten an. Wir ziehen dazu den von großem Medieninteresse begleiteten Stratosphärensprung vom 14. Oktober 2012 heran. Im Summary Report des Red Bull Stratos Projekts (Red Bull Stratos, 2013, S. 7 und S. 13) wurden folgende Daten des Sprungs veröffentlicht:

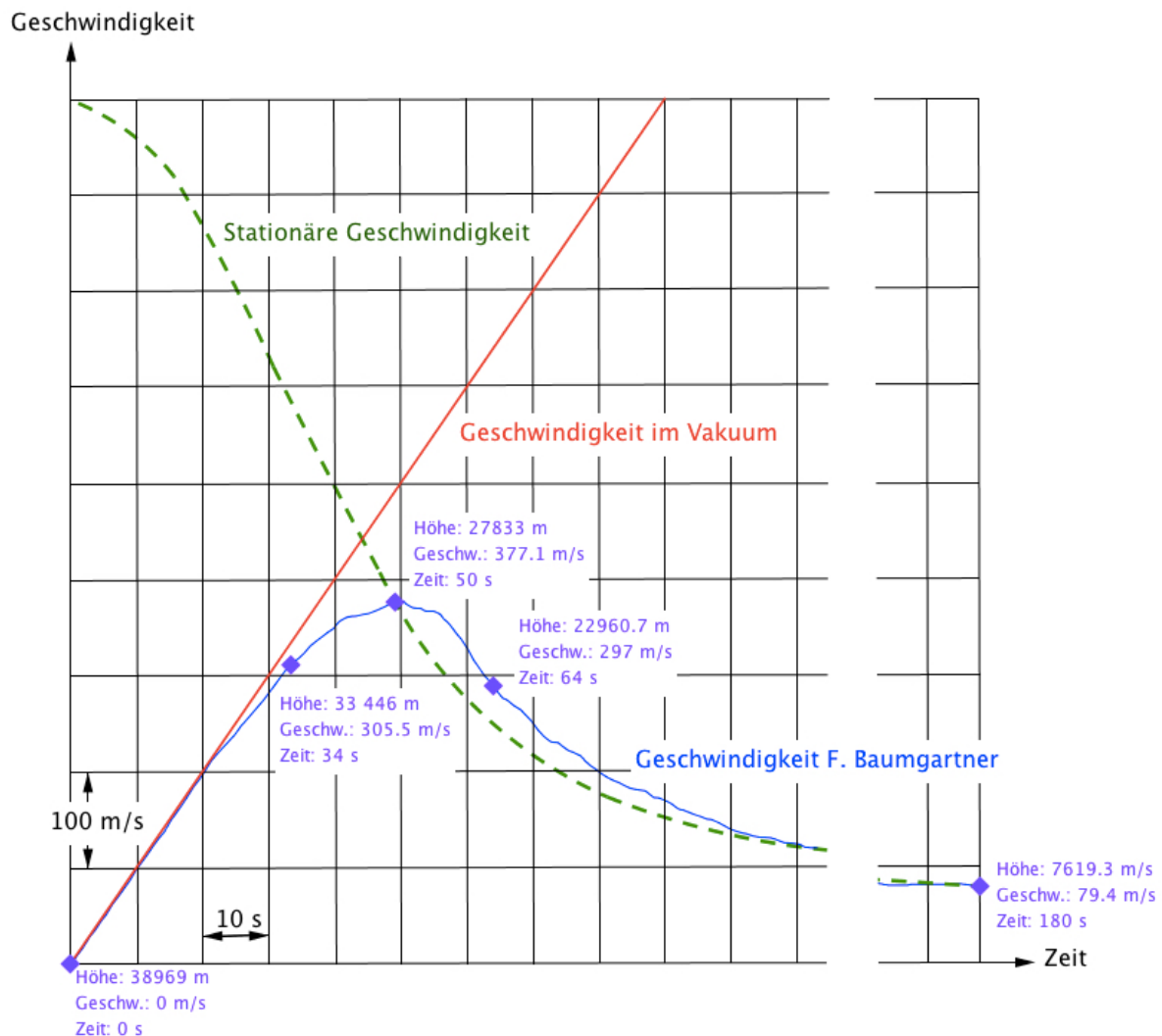


Abb. 6: Daten des Stratosphärensprungs vom 14. Oktober 2012 (Red Bull Stratos, 2013).

Höhe in m	Geschwindigkeit in m/s	Zeit in s	Atmosphärendichte in kg/m ³
38969	0	0	0.005
33446	305.5	34	0.011
27833	377.1	50	0.026
22960.7	297	64	0.055
7619.3	79.4	180	0.55

Tab. 1: Daten des Stratosphärensprungs vom 14. Oktober 2012 (Red Bull Stratos, 2013).

Die Geschwindigkeitswerte in Tabelle 1 nach 34 Sekunden (Überschreitung der Schallgeschwindigkeit) bzw. nach 64 Sekunden (Unterschreitung der Schallgeschwindigkeit) wurden den tabellierten Schallgeschwindigkeiten der Standardatmosphäre entnommen (NOAA, 1976). Im Summary Report (Red Bull Stratos, 2013) fehlen exakte Geschwindigkeitsangaben für diese Zeitpunkte, die Geschwindigkeit ist darin nur als „Mach 1“ (Schallgeschwindigkeit) angegeben. Die Geschwindigkeit von $377.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nach 50 Sekunden Fallzeit ist im Summary Report als das Geschwindigkeitsmaximum ausgewiesen. Im Geschwindigkeitsmaximum entspricht die momentane Geschwindigkeit der sogenannten „stationären Geschwindigkeit“. Die stationäre Geschwindigkeit auf Höhe h ist jene Endgeschwindigkeit, die sich bei einem hypothetischen Fall in einer homogenen Atmosphäre mit Atmosphärendichte $\rho(h)$ einstellen würde. Um die stationäre Geschwindigkeit für eine beliebige Höhe h zu ermitteln, wird $\ddot{h} = 0$ gesetzt und die Gleichung (9) nach der Geschwindigkeit aufgelöst. Die Werte für die Atmosphärendichte wurde entsprechend den Tabellen der Standardatmosphäre (NOAA, 1976) ergänzt.

Kalibrierung des Modells

Der einzige freie Parameter in unserem Modell ist $b_0 = \frac{c_{w0}A}{2m}$, dessen Wert durch die Masse und Geometrie des fallenden Objekts bestimmt ist. Um diesen Parameter für den Stratosphärensprung vom 14. Oktober 2012 aus den verfügbaren Daten bestimmen zu können, benötigen wir für einen beliebigen Zeitpunkt des Falls neben der Höhe h und der Geschwindigkeit $v = -\dot{h}$ noch die Kenntnis der Beschleunigung \ddot{h} . Tatsächlich kennen wir den Wert von \ddot{h} für einen der Messpunkte in Tabelle 1. Es ist der Zeitpunkt t^* des Geschwindigkeitsmaximums - dort muss $\ddot{h}(t^*) = 0$ gelten. Setzen wir dies in Gleichung (9) ein, so erhalten wir (nach kurzer Umformung)

$$\ddot{h}(t^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad b_0 = \frac{g}{\Gamma(h(t^*), v(t^*)) \rho(h(t^*)) v(t^*)^2} = 0.00277486 \frac{\text{m}^2}{\text{kg}},$$

wobei für die Berechnungen die Daten des Geschwindigkeitsmaximums bei $t^* = 50\text{s}$ verwendet wurden, d.h. $(h(t^*), v(t^*)) = (h(50\text{s}), v(50\text{s})) = (27833\text{m}, 377.1 \frac{\text{m}}{\text{s}})$.

Vergleich der numerischen Lösungen mit den Daten des Stratosphärensprungs

Die Abbildung 7 zeigt Plots der Lösungen als interpolierte Kurven $t \mapsto v(t)$ für Anfangsdaten $(h_0, v_0) = (38969\text{m}, 0 \frac{\text{m}}{\text{s}})$ und eine Schrittweite $\Delta t = 0.1\text{s}$ sowie die Messpunkte des Stratosphärensprungs aus dem Summary Report. Die drei dargestellten Kurven entsprechen den in Abschnitt 4.5 vorgeschlagenen Verfeinerungsstufen II-IV der Modellierung. Während für Kurve II das Troposphärendichtemodell

$$\rho_{\text{Tropo}}(h) = 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot e^{-h/8400\text{m}}$$

benutzt wurde, resultiert Kurve III aus der Verwendung der interpolierten Daten der Standardatmosphäre und der Annahme eines konstanten c_w -Werts. Für die Berechnung von Kurve IV wurde zusätzlich der Anstieg des c_w -Werts bei Überschreiten der Schallgeschwindigkeit (die „Schallmauer“) berücksichtigt.

Diskussion und Verfeinerungen des Modells

Die aus dem Standardatmosphärenmodell gewonnene Kurve passt sehr gut zu den Daten des Stratosphärensprungs von 12. 10. 2012, insbesondere wird das Geschwindigkeitmaximum recht präzise vorhergesagt. Dass Kurve III die tatsächlich gemessene Höchstgeschwindigkeit nicht ganz erreicht, kann

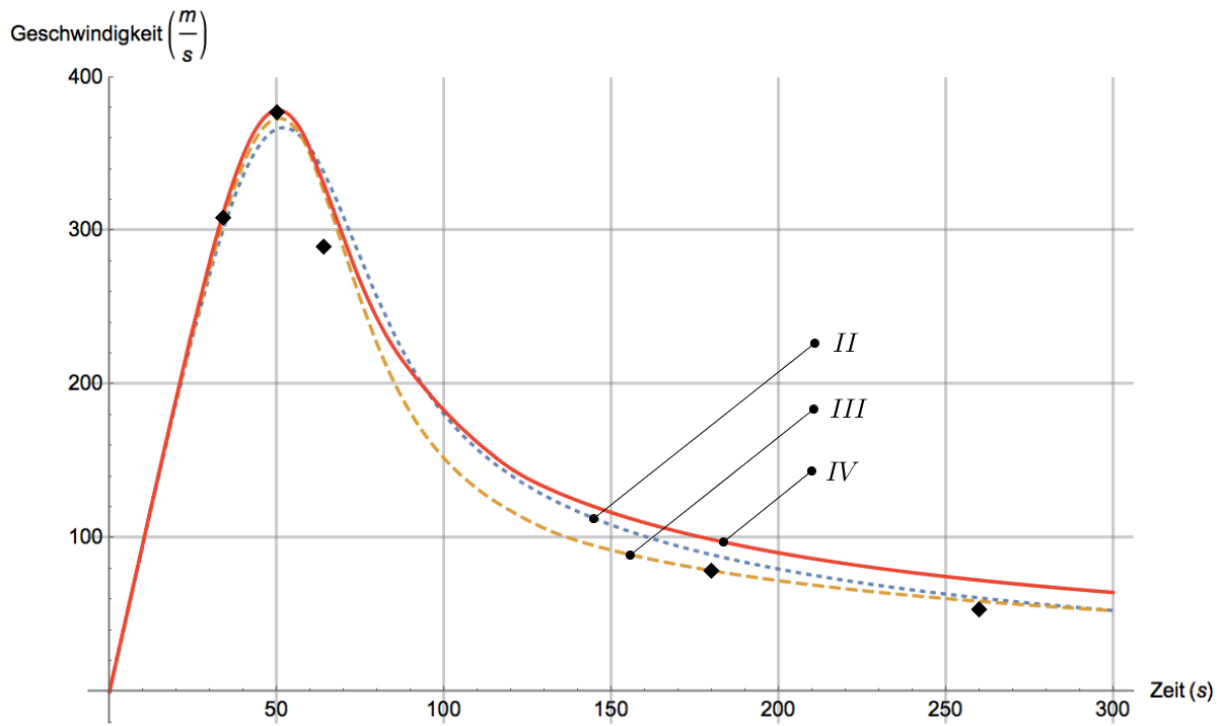


Abb. 7: Vergleich der berechneten Geschwindigkeitsverläufe (interpolierte Kurven) mit den Datenpunkten (◆) des Stratosphärensprungs, entnommen aus dem Summary Report des Stratos-Projekts (Red Bull Stratos, 2013).

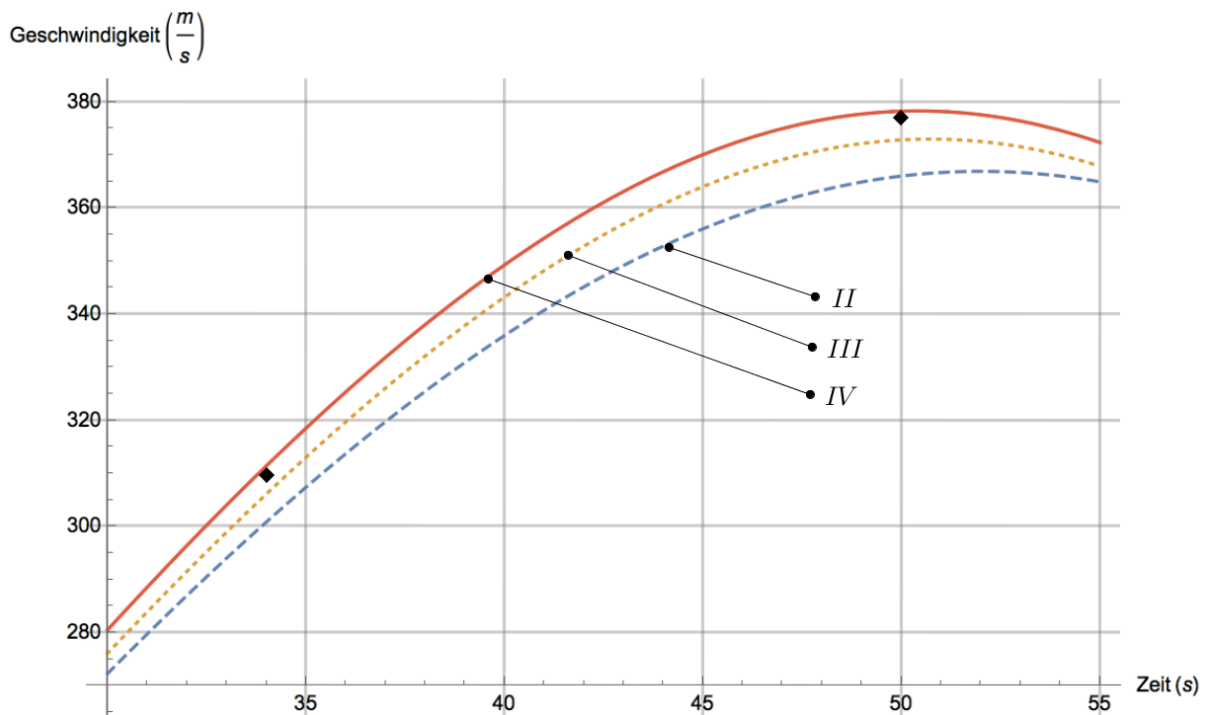


Abb. 8: Detaildarstellung zwischen 30 und 55 Sekunden Flugzeit mit Datenpunkten (◆) des Stratosphärensprungs.

gut mit der vereinfachten Annahme eines konstanten Strömungswiderstandskoeffizienten erklärt werden. Um den Koeffizienten $b_0 = \frac{c_{w0} A}{2m}$ zu bestimmen, haben wir die Daten des Geschwindigkeitsmaximums herangezogen; dieses lag bei Mach 1.25 und damit bereits deutlich über der Schallgeschwindigkeit. Steigt der Strömungswiderstandskoeffizient beim Übertritt in den supersonischen Bereich jedoch an (wie

in Abbildung 5b dargestellt), dann ist der aus dem Geschwindigkeitsmaximum abgeleitete Wert von b_0 (und damit der Bremsbeschleunigung) bei gleichzeitiger Annahme eines konstanten c_w -Werts etwas „zu hoch“, wenn man den gesamten Fall betrachtet. Wird die Änderung des Strömungswiderstandskoeffizienten mit der Geschwindigkeit im Modell berücksichtigt (Kurve IV), dann wird der Datenpunkt maximaler Geschwindigkeit ziemlich genau getroffen. Der in diesem Modell im Unterschallbereich geringere Strömungswiderstand führt zu einer größeren Geschwindigkeitszunahme am Beginn des Sprungs und damit auch zu einer höheren Maximalgeschwindigkeit. Allerdings erfolgt auch der anschließende Geschwindigkeitsabbau aufgrund der in tieferen Lagen zunehmenden Atmosphärendichte langsamer, sodass Kurve IV den letzten Datenpunkt deutlich verfehlt.

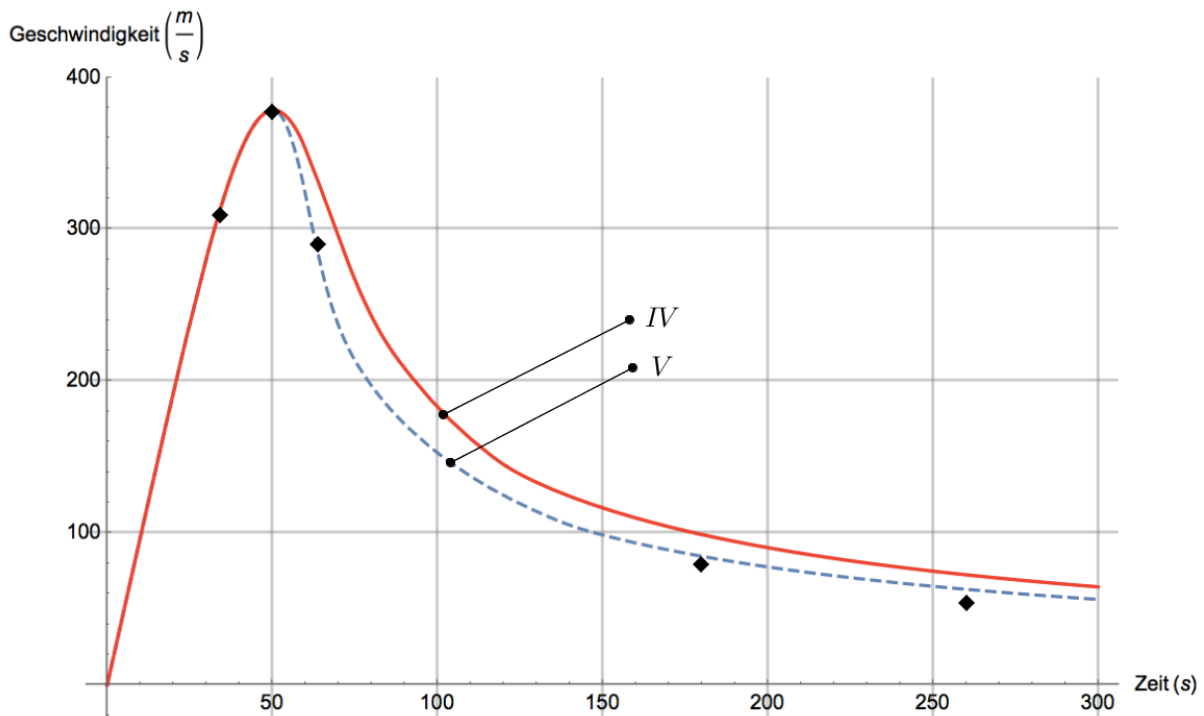


Abb. 9: Vergleich der berechneten Geschwindigkeitsverläufe (interpolierte Kurven) mit den Datenpunkten (◆) des Stratosphärensprungs.

In diesem Zusammenhang ist jedoch zu betonen, dass für nicht rotationssymmetrische Objekte allfällige Positionsänderungen während des Flugs (Änderungen der Körperhaltung, z.B. von einer eher aufrechten zu einer eher liegenden Position) schon allein aufgrund der veränderten Angriffsfläche einen sehr großen Effekt auf den Strömungswiderstand haben. Auf Videoaufzeichnungen des Sprungs ist deutlich zu erkennen, dass der Springer nach ca. 60 Sekunden Fallzeit in ein flaches Trudeln gerät (dies wird auch in (Red Bull Stratos, 2013) beschrieben) und seine Position erst nach etwa 15 Sekunden stabilisieren kann, danach jedoch zumeist eine im Vergleich zu den ersten 60 Sekunden des Falls deutlich weniger aerodynamische Körperhaltung beibehält. Der Körper des Springers ist auch nach der etwa 15 Sekunden dauernden Trudelphase weiterhin eher horizontal ausgerichtet und bietet der anströmenden Luft eine relativ große Angriffsfläche. Um dieses Verhalten zumindest qualitativ zu simulieren, ersetzen wir die Konstante $b_0 = \frac{c_{w0}A}{2m}$ durch eine zeitabhängige Funktion $b(t) = b_0 f(t)$, wobei

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 55 \\ 1 + \frac{t-55}{15} & 55 < t < 70, \\ 2 & t \geq 70. \end{cases}$$

d.h. die Angriffsfläche verdoppelt sich zwischen Sekunde 55 und Sekunde 70 und bleibt dann auf dem doppelten Anfangswert. Die aus diesem Modell erhaltene Kurve V ist zusammen mit jener für Modellierungsstufe IV in Abbildung 9 dargestellt und passt sehr gut zu den Datenpunkten. Natürlich ist dafür

auch die spezielle (jedoch durchaus plausible) Wahl der Funktion $t \mapsto f(t)$ verantwortlich; es ist allerdings nicht möglich, diese aus den Videoaufzeichnungen auch nur annähernd exakt zu ermitteln. Doch sei an dieser Stelle angemerkt, dass Kurve IV, die den Sprung bis zur Trudelphase genauso gut beschreibt, noch gänzlich ohne Anpassung von Parametern zustande kam. Der einzige nicht bereits durch das Atmosphärendichtemodell festgelegte Parameter ist der flugobjektspezifische Koeffizient b_0 , dessen Wert im Rahmen unseres DGL-Modells aber durch die Messdaten des Geschwindigkeitsmaximums eindeutig bestimmt ist und damit nicht weiter angepasst bzw. verändert werden kann.

4.5. Stufenweise Annäherung an das vollständige Modell

Für eine Behandlung der DGL des Falls aus großer Höhe erscheint es aus didaktischen Überlegungen sinnvoll, nicht mit dem vollen Modell (9) zu beginnen, sondern sich stufenweise an dieses anzunähern (wobei nicht alle Stufen erklommen werden müssen). Ausgehend von der DGL des freien Falls ($\ddot{h}(t) = -g$) könnten die weiteren Stufen etwa so aussehen:

- I. Berücksichtigung des Luftwiderstands vermöge $\ddot{h} = -g + \frac{c_{w0}A}{2m} \cdot \rho \cdot \dot{h}^2$ mit einer konstanten Atmosphärendichte (es kann hier $k = \frac{c_{w0}A}{2m} \cdot \rho$ gesetzt werden). In diesem Modell nimmt die Geschwindigkeit während des gesamten Falls zu, es ist für Stratosphärensprünge also nicht geeignet.
- II. Zusätzliche Berücksichtigung der sich mit der Höhe ändernden Atmosphärendichte durch eine Exponentialfunktion $\rho(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{h}{h_s}}$. Mit einer geeignet gewählten Skalenhöhe gibt dieses Modell die realen Verhältnisse schon recht gut wieder, zumindest qualitativ (Spreitzer & Süß-Stepancik, 2014).
- III. Verfeinerung des Atmosphärendichtemodells durch Interpolation der tabellierten Daten der Standardatmosphäre und Verwendung der entsprechenden Interpolationsfunktion $h \mapsto \rho(h)$.
- IV. Zusätzliche Berücksichtigung der Geschwindigkeitsabhängigkeit des c_w -Werts, insbesondere bei Überschreiten der Schallgeschwindigkeit („Durchbrechen der Schallmauer“).
- V. Durch Änderungen der Körperhaltung kann sich auch das Produkt $c_{w0}A$ während des Falls stark verändern. Wie dies den Geschwindigkeitsverlauf bzw. die Dynamik des Sprungs beeinflusst, kann durch Modellfunktionen $t \mapsto (c_{w0}A)(t)$ simuliert werden.

Literatur

- Bailey A. B., Hiatt J. (1971): *Free-flight measurements of sphere drag at subsonic, transonic, supersonic, and hypersonic speeds for continuum, transition and near-free-molecular flow conditions*. Tennessee: Arnold Air Force Station.
- Carter R. T., Jandir P. S., Kress M. E. (2009): Estimating the drag coefficients of meteorites for all Mach number regimes. Paper presented at the 40th Lunar and Planetary Science Conference, Texas.
- Etling D. (2008): *Theoretische Meteorologie*, Heidelberg: Springer.
- National Oceanic and Atmospheric Administration, National Aeronautics and Space Administration, United States Air Force (1976): *U.S. Standard Atmosphere*. NOAA Document S/T 76-1562.
- Red Bull Stratos Team (2013): *Summary Report: Final findings of the Red Bull Stratos Scientific Summit*. Los Angeles: California Science Center.
- Spreitzer C., Süß-Stepancik E. (2014): Der freie Fall – von der Stratosphäre bis zum Kuipergürtel. In: Maaß, H.-S. Siller (Hrsg.): *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 2*, ISTRON-Schriftenreihe, Wiesbaden: Springer Spektrum.

Verfasser

Christian Spreitzer
 Pädagogische Hochschule für Niederösterreich
 Mühlgasse 67
 2500 Baden
 christian.spreitzer@ph-noe.ac.at